Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2002

Nombre: ____________________

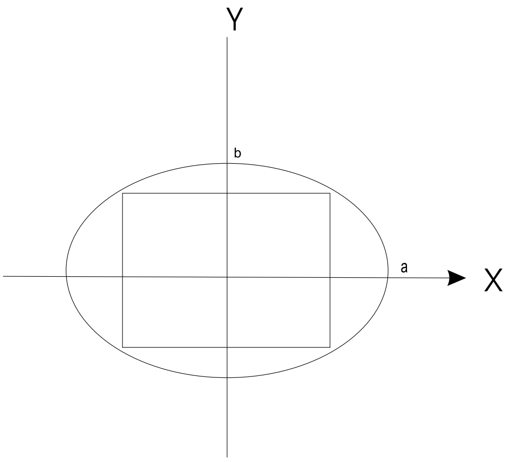
Carnet: ____________ Sección: ______

MA-1121— (DE HONOR) Final, 2002 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.

Debe resolver cuatro de los ejercicios y si resuelve satisfactoriamente el número 4, recibirá una felicitación.

1. Dada la elipse de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$,
encontrar las dimensiones de un rectángulo inscripto en ella, que tenga área máxima.



2. Considere la función $f(x)=\sqrt{x^2+x}\,-x+1$

   a) Determine el dominio de f

   b) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de convexidad y concavidad de f

   c) Determine los valores máximos y mínimos, si los hay.

   d) Estudie el comportamiento asintótico de f (para $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$)

   e) Dibuje una gráfica de f

3. Sea $P(x)=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Demuestre que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}\,-1}{x} &= \frac{a_1}{m}\,,\\ m &= 1,2,...\end{aligned}$$

4. Sea $f(x)$ una función definida y derivable en todo $x \in \mathbb{R}$. Suponemos que f cumple la regla

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}, \ \ y \in \mathbb{R}.$$

   a) Demuestre que $f(x)$ es idénticamente nula, o $f(x)$ no se anula en ningún x.
   Sugerencia: Observe que $f(0)$ sólo puede valer 0 ó 1. Luego muestre que si $f(0) = 1$, entonces $f(x_0) \neq 0$ para cualquier x_0. Haga ésto suponiendo que $f(x_0) = 0$ en algún $x_0 \neq 0$ y vea que entonces $f\left(\frac{x_0}{n}\right)$ debe valer 0 con $n = 1, 2, \ldots$. Obtenga una contradicción.

   b) Suponga que f no es nula. Demuestre que $\frac{f'(x)}{f(x)}$ es constante.
   Sugerencia: Derive la igualdad $f(x+y) = f(x)f(y)$ suponiendo x constante, y luego suponiendo y constante. Finalmente compare.

   c) Deduzca que si $f(x)$ no es nula, $f'(x)$ es también distinta de 0 en todo x

   d) Concluya que f tiene inversa l y demuestre que $l'(x) = \dfrac{k}{x}$ para alguna constante k y todo x.

5. Dado el número positivo L, demuestre que el trapecio de área máxima que tiene tres lados de longitud L, se obtiene cuando en un hexágono regular de lado L se consideran tres lados consecutivos y la diagonal que lo cierra.